

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA CARRERA DE INGENIERÍA GEOLÓGICA

Mathematical Modeling as A Didactic Strategy for the Teaching and Learning of Differential Calculus in Geological Engineering Career

Flores Condarco, Cándido Jesús

Carrera de Ingeniería Geológica. Docente

jesusflorescondarco@gmail.com

La Paz-Bolivia

99

Resumen

La modelización matemática es una antigua forma de investigación; actualmente constituye una estrategia didáctica para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática. En la Carrera de Ingeniería Geológica su desarrollo se da en la asignatura de Cálculo I; los estudiantes frecuentemente preguntan para qué se estudia y cómo se aplica las matemáticas. La modelización matemática relaciona los problemas de la realidad con la matemática. Esto se realiza a partir de un modelo matemático y su desarrollo significa resolver un problema. Para llevar a cabo la modelización matemática requiere tener competencia en la resolución de problemas. En el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial, son fundamentales los conocimientos previos de los estudiantes de la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría; con este sustento es posible desarrollar conceptos del Cálculo diferencial basados en modelos matemáticos. Las aplicaciones de la derivada constituyen las gráficas de funciones, razón de cambio, velocidad y aceleración que son desarrollados mediante la modelización y la resolución de problemas. La importancia de la modelización matemática está en orientar al estudiante hacia las asignaturas de especialidad, cuyo desarrollo se centra en modelos matemáticos digitalizados, generando software especializados que ayudan a resolver problemas prácticos de la geología.

Palabras claves: Modelización matemática, modelo matemático, resolución de problemas, cálculo diferencial, software especializado.

Abstract

Mathematical modeling is an ancient form of research; currently it constitutes a didactic strategy to carry out the teaching-learning process of mathematics. In the Geological Engineering career, it is developed in the subject of Calculus I; students frequently ask what mathematics is studied for and how it is applied. Mathematical modeling relates the problems of reality with mathematics. This is done on the basis of a mathematical model and its development means solving a problem. To carry out mathematical modeling requires competence in problem solving. In the teaching-learning process of Differential Calculus, students' previous knowledge of arithmetic, algebra, geometry and trigonometry are fundamental; with this support it is possible to develop concepts of Differential Calculus based on mathematical models. The applications of the derivative constitute the graphs of functions, rate of change, velocity and acceleration that are developed through modeling and problem solving. The importance of mathematical modeling is in orienting the student towards the specialty subjects, whose development is focused on digitized mathematical models, generating specialized software that help to solve practical problems of geology.

Key words: Mathematical modeling, mathematical model, problem solving, differential calculus, specialized software.

Introducción

“La modelización matemática, a nivel mundial, es defendida como estrategia de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y como consecuencia, los modelos matemáticos cobran importancia para el análisis y la resolución de problemas de aplicación”. (Coa y Obregón, 2020, p. 1).

En Bolivia la Modelización matemática a partir de modelos matemáticos y la resolución de problemas se ha estado desarrollando en el ámbito académico y en éstos últimos años con mayor profundidad con el desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, la digitalización de la información que ha permitido generar software especializados, cuya base

son los modelos matemáticos, según las áreas de formación profesional y que ayudan significativamente a la resolución de problemas con énfasis en las carreras del área de Ingeniería.

En el ámbito académico, principalmente en las carreras del área de Ingeniería la formación profesional se sustenta en la resolución de problemas. La dificultad está en interpretar un problema, plantearlo y expresarlo en términos matemáticos y resolver el problema, de esto surge la preocupación de los docentes universitarios que desean que sus estudiantes desarrollen su formación profesional con un buen nivel de formación matemática y que les permita ser profesionales competentes en el futuro.



Cuando se menciona que un determinado problema, sea interpretado y expresado en simbología y términos matemáticos, me estoy refiriendo a la construcción de un modelo matemático, que deberá ser resuelto mediante procedimientos operatorios matemáticos y software especializados, hasta obtener resultados. Es aquí donde se introduce el concepto de Modelización matemática (o modelación matemática) que se inicia con la identificación y formulación de un problema de la vida real, su interpretación en simbología y notación matemática que implica la construcción de un modelo matemático, su resolución e interpretación de resultados y obtención de conclusiones.

La asignatura de Cálculo en una y varias variables independientes está en el plan de estudios de la Carrera de Ingeniería Geológica de la Facultad de Ciencias Geológicas de la Universidad Mayor de San Andrés, que presenta contenidos del Cálculo Diferencial e Integral, como una de las áreas de la matemática y que contribuye significativamente con conocimiento matemático en la formación profesional del Ingeniero Geólogo. Es en esta asignatura donde se fortalece el proceso de la modelización matemática. Desde las primeras clases se empieza a conceptualizar el Modelo matemático, a partir de cualquier objeto o fenómeno natural o social que sucede en el entorno académico, entendiéndose como entorno académico todo aquello que convive o se relaciona con el estudiante o docente.

El propósito del presente ensayo académico, es hacer conocer, que en

el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial en la Carrera de Ingeniería Geológica, a partir de situaciones contextualizadas permite al estudiante identificar y aplicar los conceptos y propiedades de la derivada, para ello se utiliza como estrategia didáctica la modelización matemática a partir del modelo matemático y la resolución de problemas, de manera que el estudiante relacione el mundo real con el mundo de las matemáticas, orientado hacia las asignaturas de especialidad de nivel superior, tal como Geotecnia, Prospección geofísica, hidrogeología. En estas materias los modelos están digitalizados y concretados en software especializados, que ayudan significativamente a resolver problemas reales de la Geología.

Desarrollo

El ser humano siempre ha convivido con la naturaleza y ha intentado conocer el entorno donde ha desarrollado su actividad, tratando de entender a los objetos, fenómenos naturales y sociales, intentando expresarlos de alguna manera, tales como dibujos, gráficos, maquetas y otros, con la intención de visualizar de manera objetiva todos los elementos mencionados. Es en este momento donde se inicia el proceso de la modelización y recorre un periodo largo para llegar a un proceso de matematización.

El concepto de modelización matemática (o modelación matemática) es una antigua forma de investigación, históricamente inicia su desarrollo en los siglos XVI y XVII (con Galileo, Descartes y Euler) que se considera como el periodo de la matematización de las ciencias.

En consecuencia, puedo afirmar que la modelización matemática cuyo elemento central es el modelo matemático, no es un concepto nuevo, sino más bien tiene un largo recorrido en el tiempo y actualmente su desarrollo, respaldado de software especializados, está explicitado principalmente en las carreras del área de Ingeniería.

“Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática”. (Blomhoj, 2008, p. 21).

“Para llevar a cabo una buena modelización matemática es necesario relacionar el mundo real y el mundo matemático y tener la habilidad para moverse entre cada uno de ellos”. (Mesa y Villa, 2011, p. 7)

Un modelo matemático es la representación en símbolos y notación matemática de un objeto o fenómeno natural o social. Es una función, un gráfico o una tabla que interpretan aproximadamente datos o situaciones del mundo real (según la enciclopedia de todas las palabras de las matemáticas). Modelizar un objeto o problema de la vida real significa matematizar. Al proceso mediante el cual se aplica y desarrolla un modelo matemático se le conoce como modelización matemática.

En los cursos básicos de las carreras de Ingeniería y en particular en la carrera de Ingeniería Geológica los estudiantes preguntan para qué se estudia y cómo se aplica las matemáticas, en particular los conocimientos del cálculo. Es importante que el docente justifique la presencia de

las asignaturas de matemática en el plan de estudio. La manera de responder a las preguntas de los estudiantes es mostrar y explicar sobre la aplicabilidad de las matemáticas. Esto es posible hacerlo a través de la comprensión y aplicación de los modelos matemáticos y su desarrollo, en consecuencia, a través de la modelización matemática.

Puedo afirmar que para llevar a cabo el proceso de la modelización matemática se requiere de la competencia en la Resolución de problemas. Hoy en día la asimilación de conceptos matemáticos y su aplicación en la resolución de problemas de la vida real, es tan importante que permite consolidar el conocimiento matemático en el ser humano y permite transferir dicho conocimiento en la resolución de otros problemas de la realidad. Determinar qué parte del conocimiento matemático es importante y significativo con fines utilitarios, es una tarea personal de todo ciudadano y en particular de los estudiantes y docentes.

En general cotidianamente se resuelven problemas de toda índole: económicos, sociales, profesionales, etc. ¿Cómo se hace? ¿se conoce algún método para hallar su solución?, de hecho, en la resolución de problemas no es conocido el método o camino a seguir para resolver determinado problema, se vale de la heurística o inventiva personal para hallar la solución del problema. Es posible identificar y formular un problema de la realidad, la dificultad está en plantear este problema en términos matemáticos y resolverlos utilizando procedimientos matemáticos para hallar los resultados e interpretar la solución.

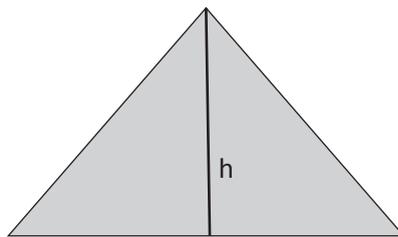
“La modelización matemática en el proceso enseñanza-aprendizaje, cuando los profesores utilizan los modelos como estrategia didáctica para abordar el currículo de una asignatura se desarrolla con éxito, dado que los estudiantes disfrutan más cuando el aprendizaje incluye actividades de modelización matemática” (Peña y Morales, 2016, p. 64)

Esto se puede observar en las clases de Cálculo de la Carrera de Ingeniería Geológica. El estudiante cuando se incorpora en un primer semestre, viene con conocimientos previos de la aritmética, geometría, álgebra y trigonometría adquiridos en su formación educativa en los niveles primario y secundario y que son importantes para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo diferencial, sin ese conocimiento

no es posible el desarrollo curricular, en el marco del programa de la asignatura. Entonces cuando se le solicita al estudiante que realice el cálculo del área de una figura geométrica tal como un triángulo, paralelogramo, rombo, trapecio, hexágono, círculo, etc. el estudiante expresa que debe obtener la fórmula para el cálculo del área de la figura geométrica dada; es en éste preciso momento que el docente aclara que si bien se obtiene una fórmula, conceptualmente es un modelo matemático que expresa en simbología matemática el área de la figura geométrica dada; cuyo desarrollo es el proceso operatorio de cálculo del área de la figura geométrica: esto significa que el estudiante de manera implícita está llevando a cabo un proceso de modelización matemática.

Figura 1

Modelo: área de un triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$



Los conocimientos del álgebra aprendidos en el nivel secundario son fundamentales para el desarrollo de los conocimientos del Cálculo; muchos de los conceptos algebraicos están íntimamente relacionados con figuras geométricas y en consecuencia son expresiones algebraicas que representan en notación matemática a algún concepto geométrico tales como área, perímetro, volumen, etc. Por lo tanto, son modelos

matemáticos algebraicos, cuyo desarrollo se muestra en el proceso operatorio hasta obtener resultados; implícitamente se está llevando a cabo un proceso de modelización matemática.

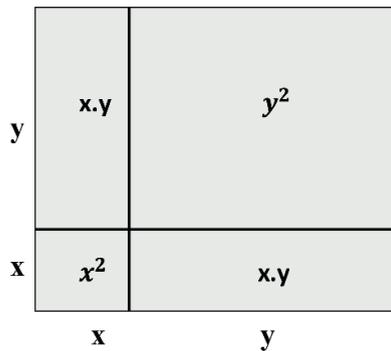
- **Modelo:** El cuadrado de un binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Geoméricamente es la suma de áreas de cuadrados y rectángulos tal como se muestra en la figura.

Figura 2

Modelo matemático: Cuadrado de un binomio



$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

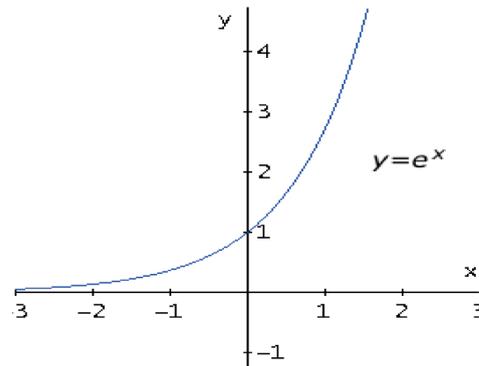
Este y otros conceptos del álgebra básica desarrollados como expresiones algebraicas son modelos matemáticos y su aplicación se realiza en los procesos operatorios y resolución de problemas del cálculo diferencial.

Entre las aplicaciones de la derivada está las gráficas de funciones. Una gráfica de una función puede modelar situaciones de la vida real.

Por ejemplo, en épocas de pandemia los profesionales del área de salud frecuentemente informaban a la población expresando que “el número de contagiados por Covid 19 está creciendo exponencialmente”, esto quiere decir que el número de contagiados crecía de acuerdo a la función exponencial lentamente en un principio y posteriormente demasiado rápido. Esto se puede visualizar en el gráfico de la función exponencial que representa el modelo matemático y cuyo proceso de elaboración de gráfica, obtención de resultados y conclusiones constituye el proceso de la modelización matemática.

Figura 3

Modelo matemático: Gráfica de la función exponencial



Las gráficas de funciones son modelos matemáticos, cuya configuración proporciona información sobre algún problema de la vida real. Para graficar una función que representa el modelo matemático, los estudiantes deben conocer y aplicar conceptos matemáticos del cálculo tales como: La derivada de una función, interpretación geométrica de la derivada, asíntotas, funciones creciente o decreciente, máximos y mínimos, concavidades y puntos de inflexión. A partir de la configuración de la gráfica los estudiantes deben ser capaces de obtener información para analizar, discutir, contrastar, conjeturar y concluir en resultados claros y comprensibles con fines aplicativos. Todo el proceso de obtención de la gráfica, interpretación, obtención de resultados y conclusiones es el proceso de la modelización matemática.

¿Qué es la razón de cambio en cálculo?

La razón de cambio representa la relación entre los cambios de la variable dependiente en comparación de la variable independiente.

Sea la función, $y = f(x)$, x es la

variable independiente, es la variable dependiente.

La derivada $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, es la razón de cambio instantáneo de y con respecto a x .

Esta razón de cambio muestra cómo los cambios de y están relacionados con los cambios de x .

Las variaciones con respecto al tiempo son casos de razón de cambio y constituyen problemas de modelización matemática. Si V es el volumen de un líquido contenido en un recipiente, el flujo del líquido a través de un conducto con respecto al tiempo t se denomina caudal.

Si $V = f(t)$ (Volumen función del tiempo)
 $V =$ volumen de un líquido contenido en un recipiente
 $t =$ tiempo
 $Q =$ Caudal del líquido

Entonces $Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$ derivada del Volumen con respecto al tiempo es un Modelo matemático.

Es el caudal instantáneo Q o flujo instantáneo del líquido en un determinado momento.

La velocidad y la aceleración son casos de razón de cambio instantáneo. Son conceptos que están entre las aplicaciones de la derivada y constituyen modelos matemáticos.

Si $s = f(t)$ representa la función del movimiento de un móvil donde

Si $s = f(t)$ representa la función del movimiento de un móvil donde
 $s =$ distancia recorrida por el móvil y
 $t =$ tiempo empleado en recorrer

Entonces la velocidad promedio es

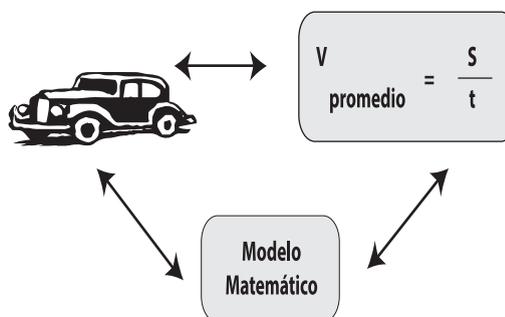
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{modelo matemático}$$

Y la velocidad instantánea del móvil es la variación de la distancia recorrida por el móvil con respecto al tiempo, matemáticamente es la derivada de la distancia recorrida con respecto al tiempo, es decir

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad \text{modelo matemático}$$

Figura 4

El Cálculo de la velocidad promedio de un viaje particular de un automóvil es un modelo matemático.



Nota. Adaptado de modelación matemática. Una teoría para la práctica. 2008. p. 21 por Blomhoj, M.

Por otra parte, la aceleración instantánea que es la variación de la velocidad con respecto al tiempo, matemáticamente es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad \text{modelo matemático}$$

Aplicando estos y otros conceptos se resuelven problemas de aplicación de la matemática, tomando en cuenta que la resolución de problemas es una estrategia didáctica inevitable para el estudiante y que está íntimamente

ligado al proceso de la modelización matemática.

Todos los conceptos y propiedades del cálculo diferencial se estudian, con la finalidad de aplicar en el estudio de modelos matemáticos y su desarrollo en las asignaturas de la especialidad en Ingeniería geológica, tales como geotecnia, hidrogeología, prospección geofísica, cuencas y sistemas petroleros, geología de minas, Sistemas de información geográfica y otras materias. Los modelos matemáticos son digitalizados, generando software especializado para cada asignatura que ayuda significativamente en la resolución de problemas prácticos de la Geología.

Conclusiones

La modelización matemática es una antigua forma de investigación, constituyéndose hoy en día una estrategia didáctica de enseñanza aprendizaje de la matemática. Es decir, recurre a un conjunto de métodos, técnicas, instrumentos y actividades para lograr la adquisición y asimilación de conocimientos del cálculo diferencial a partir del modelo matemático y la resolución de problemas. En el

desarrollo de una clase cuando se plantea un problema formulado de una situación contextualizada, es importante que el docente enfatice que se utilizan modelos matemáticos y no fórmulas matemáticas, como es el caso de las gráficas de funciones, el caudal, la velocidad y la aceleración. Para llevar a cabo el proceso de la modelización matemática se requiere de la competencia en la resolución de problemas, siendo éste un método eficaz para lograr que los estudiantes asimilen conocimientos del cálculo diferencial.

El desarrollo de la modelización matemática en la carrera de Ingeniería geológica está orientado a consolidar el concepto de modelo matemático y tiene como propósito facilitar el aprendizaje en las asignaturas de especialidad de nivel superior, que desarrollan sus contenidos en base al estudio de modelos matemáticos, tales como Geotecnia, Prospección geofísica, Geoestadística, Hidrogeología, Geología de minas, Cuencas y sistemas petroleros, sistemas de información geográfica y otras materias. Estos modelos están digitalizados y concretados en software especializados, que ayudan significativamente a resolver problemas prácticos de la Geología.

Referencias

- Ardila, G., Santaella-Tenorio, E., Guerrero, J., y Bravo, L (2020). *Mathematical model and COVID-19. Colombia Médica*, 51(2). <https://n9.cl/xdj5o6> [Links]
- Bravo, A., Vera, M., y Huérfano, Y. (2020). *Modelos matemáticos estimadores de la infección por COVID-19: Consideraciones esenciales y proyecciones en Colombia. Revista de Salud Pública*, 22(3), 1-7. <https://n9.cl/9sr6i> [Links]
- Blomhoj, M. (2008). *Modelación Matemática – Una Teoría para la Práctica*. Traducción: María Mina del original *Mathematical modelling - A theory for practice*. http://www2.famaf.unc.edu.ar/revedu/documents/vol_23/23_2modelizacion1.pdf
- Coa Mamani, R.E y Obregón Ramos, J.V. (2020). *Modelación Matemática como Estrategia Didáctica: Una Perspectiva Procedimental de Formación Académica y Científica*. *Revista Tecnológica Educativa Docentes 2.0*. Universidad César Vallejo, y Universidad Norbert Wiener, Perú.
- Enciclopedia de todas las palabras matemáticas (2009). *Modelo matemático*. Life is a Story Problem.org
- Mesa, Y.M. y Villa-Ochoa, J.A. (2011). *Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función cuadrática*. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Departamento de Ciencias Básicas. Universidad de Medellín. Colombia.
- Peña Paez, L.M. y Morales Garcia, J.F. (2016) *La modelación matemática como estrategia de enseñanza aprendizaje: El caso del área bajo la curva*. Asociación colombiana de Facultades de Ingeniería. *Revista Educación en Ingeniería*. Bogotá Colombia.